Epreuve de MATHEMATIQUES I **Durée 2 Heures**

L'usage des calculatrices est interdit

Le problème comporte trois parties indépendantes

I

1.1 Pour n entier naturel et a réel tel que $0 < a \leq \pi$ on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx$

1.1.1 Montrer que l'intégrale converge.

1.1.2 Calculer $I_{n+1}(\pi) - I_n(\pi)$ et en déduire la valeur de $I_n(\pi)$.

1.1.3 Etablir une relation entre $I_n(\pi)$ et $I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la valeur $I_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$

1.2.1 On considère une fonction $g : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ de classe C^1

$x \mapsto g(x)$

on pose $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin nx\, dx$ Montrer que A_n tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

1.2.2 Soit $f : \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est de classe C^1

1.2.3 On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\, dx$

Montrer que l'intégrale converge.
Quand n tend vers l'infini, calculer la limite de $I_n\left(\frac{\pi}{2}\right) - J_n$ et en déduire la limite de J_n.

1.3 Soit $K = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$

1.3.1 Montrer que l'intégrale converge
1.3.2 Déduire de ce qui précède la valeur de K

II

Pour tout $(x , y) \in \mathbf{R}^2$, $(x , y) \neq (0 , 0)$ on pose

$$P(x , y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \sin x - y \cos x)$$

$$Q(x , y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2}(x \cos x + y \sin x)$$

$$\omega = P(x , y)\, dx + Q(x , y)\, dy$$

2.1 Montrer que

$$\left(x^2+y^2\right)^2\ e^y \frac{\partial P}{\partial y}(x\ ,\ y)=\left(x^2+y^2\right)^2\ e^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x\ ,\ y)$$

$$= A\ (x\ ,\ y)\ \sin x\ +\ B\ (x\ ,\ y)\ \cos x\ .$$

Expliciter $A\ (x\ ,\ y)$ et $B\ (x\ ,\ y)$ et comparer $\frac{\partial P}{\partial y}(x\ ,\ y)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x\ ,\ y)$

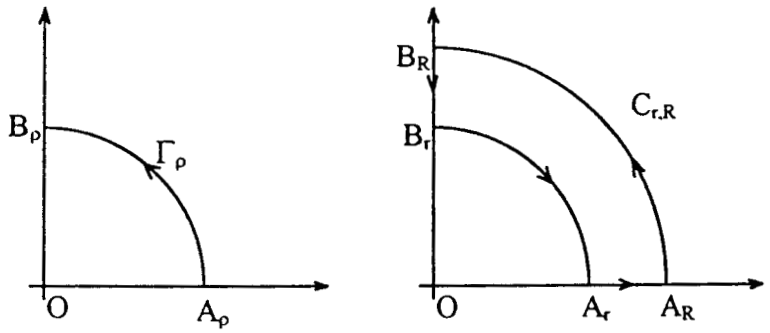
2.2 Soit $\rho > 0$ et $0 < r < R$.

On définit les arcs paramétres $\Gamma\rho$ et $C_{r,R}$ de la façon suivante :

$\Gamma\rho$ est le quart de cercle de centre O de rayon ρ orienté de $A\rho$ vers $B\rho$

où $A\rho\ (\rho\ ,\ 0)$; $B\rho\ (0\ ,\ \rho)$.

$C_{r,R}$ est le contour fermé constitué du segment $A_r\ A_R$, du quart de cercle Γ_R, du segment $B_R\ B_r$ et du quart de cercle Γ_r, orienté comme sur la figure ci-dessous



On pose $I\ (\rho)\ =\ \int_{\Gamma\rho}\omega$

2.2.1 En utilisant un théorème dont on justifiera l'application, donner, sans calcul, la valeur de $\int_{C_{r,R}}\omega$

2.2.2 Calculer $\int_{B_R B_r}\omega$

2.2.3 En déduire l'expression de $\int_r^R \frac{\sin x}{x}\ dx$ en fonction de $I\ (r)$ et $I\ (R)$

2.3

2.3.1 Montrer que $I\ (\rho)\ =\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho\ \sin\theta}\ \cos\left(\rho\ \cos\theta\right)\ d\theta$

2.3.2 Montrer que, quel que soit $\theta \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\ \theta$

et en déduire que $\left|\ I\ (R)\ \right| \leq \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right)$

Déterminer la limite de $I\ (R)$ quand R tend vers l'infini.

2.3.3 Montrer que, pour tout r, tel que $0 < r \leq 1$

$$\frac{\pi}{2} e^{-r} \cos r \leq I(r) \leq \frac{\pi}{2}$$

En déduire la limite de I (r) quand r tend vers zéro.

2.4 Retrouver la valeur de $K = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ défini au 1.3 .

III

On rappelle et on utilisera le théorème suivant : soit $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$

a) F (x) est définie sur tout intervalle D de **R** tel que pour tout x de D, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit intégrable sur [a, b] .

b) si f (x, t) est continue sur $\Delta = D \times [a, b]$ alors F (x) est continue sur D .

c) si, de plus $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, existe et est continue sur Δ, alors F (x) est dérivable sur D

et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Soit $f(x, t) = e^{-ux} \frac{\sin t}{t}$ et la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x, t) dt$ où $n \in N$.

3.1

3.1.1 Montrer que $u_0(x)$ est défini .

3.1.2 Montrer que pour tout entier n ,

$u_n(x) = (-1)^n \int_0^{\pi} g(n, x, u) du$ - Expliciter g (n, x, u) .

3.1.3 Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge uniformément sur R^+.

3.1.4 On pose $U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ Expliciter U (x) sous forme d'intégrale généralisée.

3.2 Etude des propriétés de U (x)

3.2.1 Montrer que U (x) est continue sur R^+.

3.2.2 Montrer que U (x) est dérivable sur R^{+*}.

3.2.3 Montrer que $\forall x \in R^{+*}$ $U'(x) = -\int_0^{\infty} e^{-xt} \sin t \, dt$

3.3

3.3.1 Calculer U' (x) .

3.3.2 En déduire que U (x) = - Arctan x + c .

3.3.3 En utilisant la valeur de K trouvée au 1.3.2 ou 2.4 , calculer c et en déduire U (x).